PART3 指数関数・対数関数のグラフの概形

要点整理と公式

要点 ① 指数関数・対数関数のグラフの概形

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ であることを用いて，関数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ のグラフの概形をかく。

$$f(x)=xe^{-x}$$

$$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot\left(-e^{-x}\right)=(1-x)e^{-x}$$

$$f''(x)=(-1)\cdot e^{-x}+(1-x)\cdot\left(-e^{-x}\right)=(x-2)\cdot e^{-x}$$

$f(x)$ の増減および凹凸は以下。

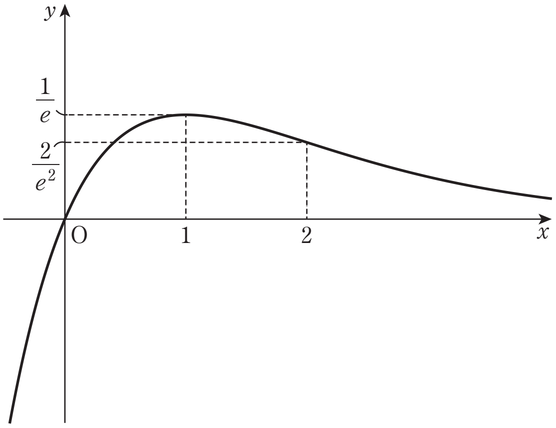
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{2}{e^2}$	↘

また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ より，x 軸はこの曲線の漸近線

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=$$

$f(0)=0$ より，y 切片は 0

よって，グラフの概形は右図



[MEMO]

3 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを用いてもよい。

Point Pickup

指数関数・対数関数のグラフの概形

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ や $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ などの極限の情報が与えられている場合，これらを用いて $x\to\pm\infty$ のときの極限や漸近線を求めることで，グラフの概形がよりかきやすくなる。

第12講 PART3 確認問題

1 関数 $f(x)=xe^x$ において，

$$f''(x)=\left(x+\boxed{\text{ア}}\right)e^x$$

また，$y=f(x)$ のグラフの漸近線は $\boxed{\text{イ}}$ であり，グラフの概形は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ は下の①～④のうちから選べ。

ただし，$\lim_{x \to -\infty} xe^x=0$ であることを用いてもよい。

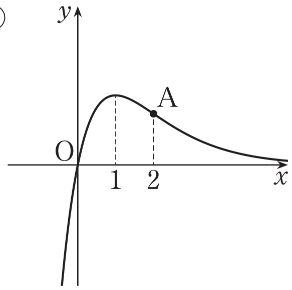
なお，図の中の A は変曲点である。

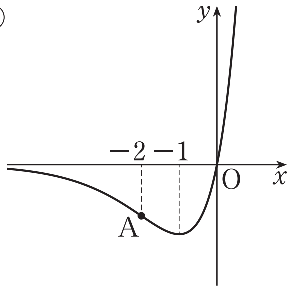
［$\boxed{\text{イ}}$ の選択肢］

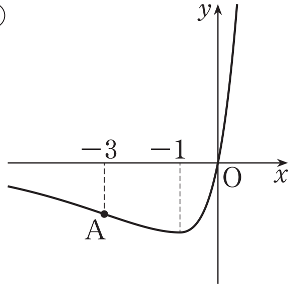
① x 軸　　② y 軸

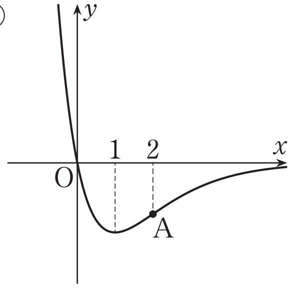
③ 直線 $x=1$　　④ 直線 $y=1$

［$\boxed{\text{ウ}}$ の選択肢］

①


②


③


④


PART3 指数関数・対数関数のグラフの概形

3 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ であることを用いてもよい。

[解答]

定義域は $x>0$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ とすると $\log x=1$ より $x=e$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-3+2\log x}{x^3}$$

$f''(x)=0$ とすると $\log x=\dfrac{3}{2}$ より $x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

$f(x)$ の増減および凹凸は以下。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	／	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘

$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\log x}{x}=-\infty$ より，

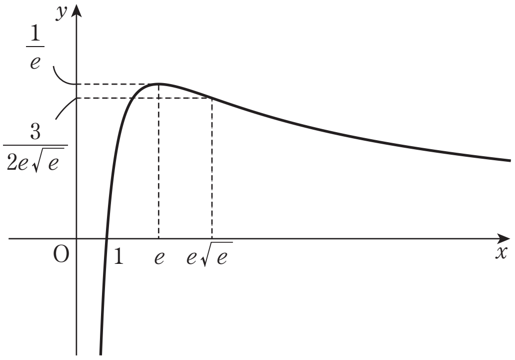
y 軸はこの曲線の漸近線

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ より，x 軸もこの

曲線の漸近線

$f(x)=0$ より $\dfrac{\log x}{x}=0$　　$x=1$

よって，グラフの概形は右図



第12講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：①，ウ：②

[解説]

$$f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x$$ [A]

$$=(x+1)e^x$$

$f'(x)=0$ とすると，$x=-1$

$$f''(x)=1\cdot e^x+(x+1)\cdot e^x$$

$$=(x+2)e^x$$

$f''(x)=0$ とすると，$x=-2$

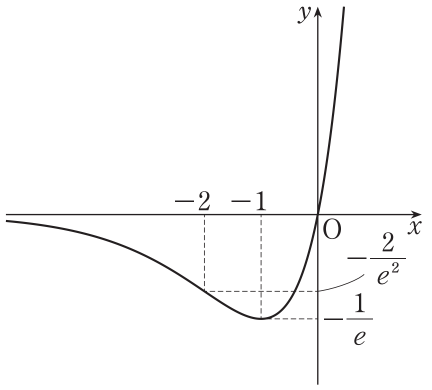
$f(x)$ の増減および凹凸は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{2}{e^2}$	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

[B]

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ より，x 軸はこの曲線の漸近線である。[C]

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は，次の図のようになる。



[A]　$f'(x)=(x)'e^x+x\cdot(e^x)'$

[B]　$f'(x)$ と $f''(x)$ を含めた増減と凹凸の表をつくる。

[C]　$\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ または $\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$ が成り立つとき，直線 $y=a$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。